

Vollständige analytische Beschreibung der Arbeitsraumgrenzen für einen Manipulator in planaren Reihen

Comptes Rendus Mécanique 346 (2018) 13 – 25
<https://doi.org/10.1016/j.crme.2017.10.004>

Jérôme Bastien

Laboratoire Interuniversitaire de Biologie de la Motricité
 POLYTECH

Claude Bernard Universität -Lyon 1
 15 Boulevard André LATARJET
 69622 Villeurbanne Cedex
 Frankreich
 jerome.bastien@univ-lyon1.fr

Zusammenfassung

Wir schlagen eine allgemeine und analytische Methode zur Beschreibung der Grenzen des planaren Arbeitsbereichs vor, d. H. Der Grenze des Teils des Planraums, der durch das Ende eines Menschen- oder Roboterarms erreicht wird. Das vorgeschlagene Verfahren ist in drei unabhängige Schritte unterteilt, von denen keiner die Berechnung von Ableitungen, Determinanten oder Eigenwerten oder die Verwendung von Methoden zur numerischen Lösung nichtlinearer Probleme erfordert, die alle in der Literatur häufig verwendet werden. Der erste Schritt, der bereits in früheren Arbeiten vorgestellt wurde, besteht darin, die notwendige Degeneration der Jacobi-Matrix der Positionsfunktion am Rand des Arbeitsbereichs geometrisch zu interpretieren und eine Bedingung für die Ausrichtung bestimmter Gelenke zu bestimmen ein Treffen von Kreisbögen, die den Rand enthalten. Dann ermöglicht es die Untersuchung der infinitesimalen Variation eines Punktes in Bezug auf diesen Kreis für jeden der Bögen eines Kreises, alle oder einen Teil der Bögen eines zuvor definierten Kreises zu eliminieren, der sich nicht an der Grenze befindet. Schließlich ermöglicht ein globaler Verlauf des Zusammentreffens der Kreisbögen die Bestimmung der Außengrenze sowie der Innengrenze des möglichen Lochs des Arbeitsbereichs, der den Ursprung enthält.

Schlüsselwörter: Robotik; Arbeitsbereich; Grenze; Arme; Artikulation; Biomechanik

1. Darstellung des Problems

In der Robotik wie in der Biomechanik ist die Kenntnis des Arbeitsraums, eines Raumbereichs, den beispielsweise das Ende eines menschlichen Gliedes oder der Arm eines Roboters erreichen kann, von grundlegender Bedeutung. Der Rand dieses Arbeitsbereichs muss korrekt definiert sein. Die betrachteten Gelenke sind Schwenkglieder, die durch ein Intervall definiert sind, zu dem der Winkel zwischen den beiden Segmenten um das Glied gehört. Im Flugzeugfall ist diese Anmerkung die Fortsetzung der Arbeiten [2,3], bei denen wir eine lokale Bedingung vorgeschlagen haben, die notwendig, aber nicht ausreichend ist, damit sich ein Punkt im Arbeitsbereich an seiner Grenze befindet. Diese Bedingung beruhte auf einer einfachen geometrischen Eigenschaft und ermöglichte es, in analytischer Form eine Reihe von Kreisbögen zu erhalten, ohne die üblichen Berechnungen von Determinanten in der Symbolik, die die Grenze enthalten. Dies ist Schritt 0 der Methode (siehe Abschnitt 2).

In Anbetracht der Einfachheit und Robustheit der vorgeschlagenen Methode möchten wir nun die Teile der bestimmten Kreisbögen entfernen, die sich nicht am Rand des Arbeitsbereichs befinden. Auch hier schlagen wir eine allgemeine, analytische und vollständige Methode vor, die ausschließlich auf einfachen Berechnungen von Skalarprodukten basiert und Schritt 1 der Methode darstellt (siehe Abschnitt 3). Schließlich schlagen wir eine global notwendige und ausreichende Bedingung vor, die es ermöglicht, die Grenze analytisch in Form von Treffen von Kreisbögen anzugeben (Abschnitt 4). Wir werden einige mögliche Anwendungen geben (Abschnitt 5). Anschließend machen wir einige Anmerkungen zur IT-Implementierung (Abschnitt 6), bevor wir ein Beispiel (Abschnitt 7) und die wenigen Einschränkungen der vorgeschlagenen Methode (Abschnitt 8) geben.

Wie in [2,3] betrachten wir (O, \vec{i}, \vec{j}) eine direkte orthonormale Referenz, p eine ganze Zahl größer oder gleich eins, $(l_i)_{1 \leq i \leq p}$ streng positive Zahlen und $(\theta_i^+)_{1 \leq i \leq p}$ und $(\theta_i^-)_{1 \leq i \leq p}$ $2p$ Winkel mit

$$\forall i \in \{1, \dots, p\}, \quad -\pi < \theta_i^- < \theta_i^+ \leq \pi. \quad (1)$$

Wir definieren den Arbeitsbereich als Punktmenge A_p Überprüfung

$$A_0 = 0, \quad \left(\widehat{\vec{j}, 0A_1} \right) = \theta_1, \quad (2a)$$

$$\forall i \in \{2, \dots, p\}, \quad \left(\widehat{A_{i-2}A_{i-1}, A_{i-1}A_i} \right) = \theta_i, \quad \forall i \in \{1, \dots, p\}, \quad A_{i-1}A_i = l_i, \quad (2b)$$

und Einschränkungen

$$\forall i \in \{1, \dots, p\}, \quad \theta_i \in [\theta_i^-, \theta_i^+]. \quad (2c)$$

(siehe Abbildung 1).

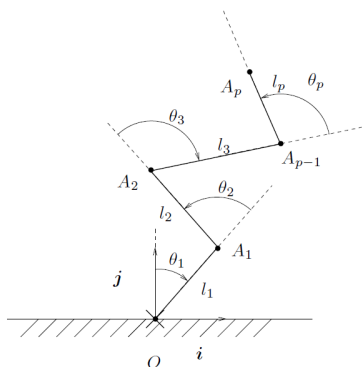


Abbildung 1. Das betrachtete Planungssystem.

Wir betrachten die Funktion Φ_p von

$$F = \prod_{i=1}^p [\theta_i^-, \theta_i^+], \quad (3)$$

in Richtung \mathbb{R}^2 , definiert durch

$$\forall (\theta_1, \dots, \theta_p) \in F, \quad \Phi_p(\theta_1, \dots, \theta_p) = A_p. \quad (4)$$

Viele Arbeiten beziehen sich natürlich auf die Bestimmung der Grenzen des Arbeitsbereichs. Für Schritt 0 die Funktion Jacobian Φ_p ist notwendigerweise von Rang weniger als eins, wenn der Punkt an der Grenze liegt. Systematisch wird dieser Schritt symbolisch gelöst, indem alle möglichen extrahierten Determinanten gelöscht werden [5,6,7,8,9,10]. Für Schritt 1 verweisen wir zum Beispiel auf die zahlreichen Werke von Abdel-Malek [7,11,8]. Die vorgestellten Berechnungen gelten in einem allgemeineren Rahmen als bei uns (2 oder 3D, sphärische Verbindungen oder Gleitzapfen). Der verwendete natürliche Zustand basiert auf einer Entwicklung, die lokal auf Ordnung 2 um einen Punkt begrenzt ist, an dem der Jacobi entartet ist. Dort wird die mit dem Hessischen verbundene quadratische Form untersucht. Dann ist die ausreichende Bedingung, nicht im Arbeitsbereich zu sein, wird in der symbolischen Berechnung programmiert (zum Beispiel mit Mathematica $\text{\textcircled{R}}$) und die Berechnung von Rang und Matrixspektrum wird verwendet. Dies sind die Vorzeichen der Eigenwerte, die es ermöglichen, die verschiedenen Fälle zu unterscheiden.

Diese Berechnungen sind theoretisch recht einfach, können aber nicht nur lang, sondern auch starke numerische Instabilitäten aufweisen. Im Gegenteil, wir versuchen in diesem Hinweis, die besondere Struktur unseres Planproblems zu verwenden. Wir nutzen insbesondere die Tatsache, dass wir uns lokal entlang eines Kreises bewegen. Es wird keine Berechnung der Ableitung oder des Spektrums von Matrizen durchgeführt.

Weitere zahlreiche Studien befassen sich mit der Lösung dieses Problems für Manipulatoren in Reihe oder parallel [12-24]. Keiner schlägt jedoch eine allgemeine Methode vor, und diese Arbeiten beziehen sich auf bestimmte Fälle (geringe Anzahl von Freiheitsgraden) oder werden mit numerischen Näherungen oder dank zufälliger Simulationen erstellt.

Nach unserem Kenntnisstand schlägt nur eine neuere und sehr interessante Arbeit eine allgemeine Auflösungsmethode vor, um die Grenzen des Arbeitsbereichs in einem sehr allgemeinen Rahmen zu bestimmen (siehe [25] und [26, Kapitel 4 (Bestimmung des Arbeitsbereichs)]). Es handelt sich jedoch um eine numerische Auflösungsmethode, die auf der in [27] vorgeschlagenen Methode basiert.

2. Stufe 0: lokaler Zustand notwendig, aber nicht ausreichend, um zur Grenze zu gehören (Erinnerungen).

Die Grenze $S = \partial D = D \setminus \overset{\circ}{D}$ wird traditionell in die Form der folgenden Partition zerlegt $S = S_I \cup S_{II} \cup S_{III} \in \mathbb{R}^2$. Für S_I alle Winkel θ_i frei sind (d. h. in $]\theta_i^-, \theta_i^+[$). Für S_{II} gibt es mindestens zwei freie Komponenten unter den p Winkel (die anderen sind θ_i^\pm). Für S_{III} gibt es nur eine freie Komponente. Wir haben in [2,3] gezeigt, dass die Gelenke Konfigurationen von entsprechen S_I und von S_{II} entsprechend freien Komponenten sind zwangsläufig ausgerichtet, was es möglich machte, den vollständigen Algorithmus zur Bestimmung der Punkte zu schreiben und zu programmieren, der diese einfache geometrische Bedingung verifiziert. S_{III} ist eindeutig eine endliche Begegnung von Bögen. Wir haben das also gezeigt S ist in einer Vereinigung von Bögen eines Kreises enthalten, der durch definiert ist

$$\bigcup_{1 \leq m \leq M} \Phi_p \left(\prod_{k=1}^p \Theta_k^m \right), \quad (5)$$

wo \prod bezeichnet das kartesische Produkt und jeden Satz Θ_k^m wird analytisch bestimmt. Es ist entweder ein Singleton oder ein Intervall (offen oder geschlossen). Für jedes m nur eine der Mengen Θ_k^m wird nicht auf einen Singleton reduziert.

Anmerkung 1. Es ist möglich, dass eine oder mehrere der Parteien S_I , S_{II} wo S_{III} ist leer, was den Algorithmus von Schritt 0 nicht ungültig macht und für alle Werte von gültig ist θ_i^\pm .

3. Schritt 1: ausreichende lokale Bedingung, aber nicht erforderlich, damit Teile von Kreisbögen nicht an der Grenze liegen.

Sobald wir die möglichen Kreise bestimmt haben, zu denen ein Punkt unbedingt gehören muss, um an der Grenze zu sein, betrachten wir, wie es in der Literatur klassisch gemacht wird, den lokalen Beitrag der infinitesimalen Variationen der Winkel, die diesen Punkt definieren. Wenn sich dieser Punkt auf beiden Seiten des Kreises entwickeln kann, schließen wir, dass er sich nicht an der Grenze befindet.

Im Gegenteil, wenn es lokal auf derselben Seite des Kreises bleibt, behalten wir den Punkt oder alle diese Punkte (dh einen Teil des untersuchten Kreisbogens) bei Informationen über die Seite, auf der es sich befindet. Diese Unterscheidung erfolgt normalerweise durch Studium der Symbolik und Bestimmung des Spektrums und des Ranges einer Matrix. Im Gegenteil, in dieser Anmerkung kann man im einfachen Fall die Seiten bestimmen, an denen sich der lokal untersuchte Punkt mit einfachen Berechnungen von Skalarprodukten entwickelt.

Untersuchen wir nun einen der durch (5) definierten Kreise, der einer festen und notierten ganzen Zahl m entspricht C_m . Für $i \in \{1, \dots, p\}$, Θ_i^m ist ein Intervall, das nicht auf einen Singleton reduziert ist. Die anderen Intervalle sind ein Singleton. Der Winkel θ_i variiert daher in der Zwischenzeit Θ_i^m . Das Studium der infinitesimalen Variation von θ_i bringt hier nichts, da wir wissen, dass der Punkt A_p bewegt sich entlang des Bogens C_m . Wir können jedoch davon ausgehen, dass jeder der Winkel θ_j , für $j \neq i$ kann um seinen Wert unendlich variieren. Für $j \neq i$ überlegen ε_j definiert durch

$$\varepsilon_j = \begin{cases} 1, & \theta_j = \theta_j^-, \\ -1, & \theta_j = \theta_j^+, \\ 0, & \theta_j \in]\theta_j^-, \theta_j^+[. \end{cases} \quad (6)$$

Wir definieren $h = {}^t(h_1, \dots, h_p) \in \mathbb{R}^p$ mit

$$h_i = 0. \quad (7)$$

Überlegen Sie $\Theta = (\theta_1, \dots, \theta_p) \in \mathbb{R}^p$. Die Punkte A_k , für $1 \leq k \leq p$ sind abhängig von Θ , jetzt behoben und $A_p(\Theta + h)$ bezeichnet $\Phi_p(\Theta + h)$. Betrachten Sie die Anwendung $\rho : \mathbb{R}^{p-1} \rightarrow \mathbb{R}$, $\tilde{h} = (h_1, \dots, h_{i-1}, 0, h_{i+1}, \dots, h_p) \mapsto \rho(\tilde{h})$ definiert durch

$$\rho(\tilde{h}) = A_{i-1} A_p^2(\Theta + \tilde{h}) - A_{i-1} A_p^2. \quad (8)$$

Durch Hinzufügen von Nullkomponenten, die der Komponente entsprechen können wir den Gradienten berücksichtigen $B \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ und das Hessische (symmetrisch) $C \in \mathcal{M}_{p,p}(\mathbb{R})$ der Funktion ρ , berechnet in 0 und schreibe die begrenzte Entwicklung von ρ in der Nähe von bestellen $h = 0$ in der Form

$$\rho(h) = Bh + {}^t hCh + o(\|h\|^2), \quad (9)$$

wo h prüft (7). Normalerweise (zum Beispiel in [7]) werden diese Elemente in symbolischer Form (formal) (siehe unten) explizit berechnet.

Lemma 3.1 (Ausdruck von B und diagonale Terme von C) Wir stellen fest σ Vektorwinkeldrehung $\pi/2$ von \mathbb{R}^2 . Lass uns posieren $r_j = A_{j-1}A_p$, für $j \in \{1, \dots, p\} \setminus \{i\}$. Wir haben für $j \in \{1, \dots, p\} \setminus \{i\} ::$

$$B_j = 2\overrightarrow{A_{i-1}A_p} \cdot \sigma\left(\overrightarrow{A_{j-1}A_p}\right), \quad (10a)$$

$$C_{jj} = r_j^2 - \overrightarrow{A_{i-1}A_p} \cdot \overrightarrow{A_{j-1}A_p}. \quad (10b)$$

Lemma 3.2 Wir haben dann $z j \in \{1, \dots, p\} \setminus \{i\} ::$

- Wenn $j \leq i-1$ ist, gibt es $\alpha \neq 0$ und β nur abhängig von $(\theta_k)_{k \in \{j+1, \dots, i-1, i+1, \dots, p\}}$ mit

$$\sigma\left(\overrightarrow{A_{j-1}A_p}\right) \cdot \overrightarrow{A_p A_{i-1}} = \alpha \sin(\theta_i + \beta), \quad \forall \theta_i. \quad (11)$$

- Wenn $j \geq i+1$ ist, gibt es α nur abhängig von $(\theta_k)_{k \in \{i+1, \dots, p\}}$ mit

$$\sigma\left(\overrightarrow{A_{j-1}A_p}\right) \cdot \overrightarrow{A_p A_{i-1}} = \alpha, \quad \forall \theta_i. \quad (12)$$

Hinweis 2. Die Nummer $\sigma\left(\overrightarrow{A_{j-1}A_p}\right) \cdot \overrightarrow{A_p A_{i-1}}$ hat das gleiche Vorzeichen wie die Komponente der Verschiebung des Punktes $A_p(\Theta + h)$ in Richtung $\overrightarrow{A_p A_{i-1}}$ wenn der Winkel h_j erfährt eine positive infinitesimale Variation und dass alle anderen Komponenten von h Null sind.

Wir werden die Teile von Kreisbögen entfernen, die Punkten entsprechen, die die folgende ausreichende Bedingung erfüllen, um nicht an der Grenze zu sein:

$$\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \quad \exists h, h' \in \mathbb{R}^p, \left((7), \Theta + h, \quad \Theta + h' \in F, \quad 0 < \|h\| \leq a, \quad 0 < \|h'\| \leq a, \quad \rho(h)\rho(h') < 0 \right). \quad (13)$$

In diesem Fall in der Tat $A_p(\Theta + h)$ entwickelt sich auf beiden Seiten des Bogens C_m .

- Im Gegensatz zur Literatur geben wir uns zunächst damit zufrieden, nur den Fall zu untersuchen, in dem eine einzelne Komponente von h ist ungleich Null, die anderen sind Null (lokales Diagonalkriterium). Also lasst uns reparieren $j \in \{1, \dots, p\} \setminus \{i\}$. Wenn wir es bemerken $\rho_j(\kappa) = \rho(0, \dots, 0, \kappa, 0, \dots, 0)$ mit $\kappa \in \mathbb{R}$ dann wird (9) geschrieben

$$\rho_j(\kappa) = B_j \kappa + C_{jj} \kappa^2 + o(\kappa^2), \quad (14)$$

Beachten Sie das $B_j = 0$ ist äquivalent zu A_{i-1} , A_{j-1} und A_p ausgerichtet. Nach [2,3] $\varepsilon_j = 0$ impliziert daher das $B_j = 0$. Wir gehen in der Biomechanik oder Robotik vernünftigerweise davon aus, dass die Punkte A_k kann nicht verwechselt werden, was impliziert, dass wenn $B_j = 0$ dann $C_{jj} \neq 0$. Wir haben daher unter Berücksichtigung von (6):

$$\text{Wenn } B_j \neq 0 \text{ ist, dann } \varepsilon_j \neq 0 \text{ und vor Ort, } \rho_j(\kappa) \text{ ist vom selben Zeichen wie } B_j \varepsilon_j \quad (15a)$$

$$\text{Wenn } B_j = 0, \text{ dann } C_{jj} \neq 0 \text{ und vor Ort, } \rho_j(\kappa) \text{ ist vom selben Zeichen wie } C_{jj}. \quad (15b)$$

Beachten Sie, dass für diesen Schritt die Kenntnis der Ausrichtung bestimmter Punkte, die in Schritt 0 (in [2,3]) geometrisch hervorgehoben wurden, von grundlegender Bedeutung ist.

Bemerkung 3. Nach Bemerkung 2 interessiert man sich im Fall (15a) tatsächlich für die normale infinitesimale Verschiebung eines Punktes, der einen der Kreisbögen beschreibt, wie auch Bemerkung Abdel-Malek zum Beispiel in [7]. In dieser Arbeit ist auch eine begrenzte Entwicklung (8) über die Berechnung der normalen Beschleunigung vorhanden. In diesem Fall (15b) reicht dagegen die Untersuchung der normalen Bewegungskomponente allein nicht mehr aus.

Die Nummer B_j hängt davon ab oder nicht (nach Lemmas 3.1 und 3.2. Durch Variation von j in $\{1, \dots, p\} \setminus \{i\}$ Wir können daher alle Teile der Kreisbögen entfernen, für die $\rho_j(\kappa)$ ändert das Vorzeichen und behält daher nur die Teile der Kreisbögen bei, für die das Vorzeichen von $\rho_j(\kappa)$ lokal lokal konstant ist, d.h.

$$\exists \varepsilon_0 \in \{-1, 1\}, \quad \forall j \in \{1, \dots, p\} \setminus \{i\}, \quad \begin{cases} B_j = 0 & \implies \varepsilon_0 C_{jj} > 0, \\ B_j \neq 0 & \implies \varepsilon_0 \varepsilon_j B_j > 0. \end{cases}$$

- Wir haben daher nur die diagonalen Terme von C eliminiert alle Teile von Kreisbögen, die eine ausreichende Bedingung erfüllen, was zu (13) führt. Anhang A enthält eine Diskussion über die von nun an anzuwendende Methodik und einen Vergleich mit den üblichen Methoden, um diesen Text nicht zu belasten.

Schließlich eliminieren wir für jeden der Bögen von (5) entweder den gesamten untersuchten Bogen, wenn keiner seiner Punkte an der Grenze liegt, oder wir behalten nur einen Teil (entsprechend eine endliche Begegnung von Kreisbögen). Wenn wir die Wahl treffen (A.2), ist es nicht sicher, ob der erhaltene Teil Punkten entspricht, die sich lokal auf derselben Seite des Kreises befinden. Im Gegenteil, wenn wir die Wahl treffen (A.7), deren Festlegung länger dauert, ist es sicher, dass dieser Teil Punkten entspricht, die sich lokal auf derselben Seite des Kreises befinden, und wir kennen dann die Seite des Bogens von Kreis (innen oder außen), in dem sich der Punkt lokal entwickelt A_p . Auch hier können wir also den Teil der Kreisbögen behalten, der nur Punkte enthält, die in der Form (5) sicherlich nicht darin enthalten sind.

Für alle hier vorgestellten Beispiele wurde die Wahl (A.2) getroffen. Zur Kontrolle ist es jedoch interessant, dann die Auswahl (A.7) festzulegen, um a posteriori zu überprüfen, ob alle Bögen der gehaltenen Kreise garantiert sind. Es wurde dann festgestellt, dass alle Kreisbögen garantiert sind.

Siehe Abbildung 6c, in der die Kreisschritte aus Schritt 1 dargestellt wurden, wobei ein kleiner Balken für jeden Bogen die Seite angibt, auf der sich die Entwicklung entwickelt A_p .

4. Schritt 2: Gesamtzustand notwendig und ausreichend, um an der Grenze zu sein.

Es bleibt nun, die durch (5) definierten Teile eines Bogens zu entfernen, die sich nicht an der Grenze befinden, diesmal unter Verwendung eines globalen Kriteriums. In der Tat vor Ort der Punkt A_p kann auf derselben Seite des Kreisbogens bleiben, aber die andere Seite des Randes kann für andere Winkelwerte erreicht werden, die weit von denen entfernt sind, die den Kreisbogen definieren. Abdel-Malek in [7,8] sagt nüchtern, dass der Rand des Arbeitsbereichs die Hüllkurve der zuvor definierten Kurven ist.

Wir beginnen an einem Punkt, von dem wir sicher sind, dass er zur Grenze des Arbeitsbereichs gehört: dem Punkt, der am weitesten vom Ursprung der durch (5) definierten Kreisbogenmenge entfernt ist. Es ist sicher, dass dieser Punkt zu einem Kreis des Mittelpunktskreises des Ursprungs gehört. Dann drehen wir Kreisbogen für Kreisbogen immer in die gleiche Richtung, indem wir für jeden Schnittpunkt von Kreisbögen den bestimmen, dessen Tangentenrichtung dem Kreisbogen so nahe wie möglich kommt wir haben gerade festgestellt. Dann behalten wir den Teil dieses Bogens zwischen dem betrachteten Punkt und dem Schnittpunkt mit dem nächsten Bogen unter den verbleibenden. Der Algorithmus endet, wenn Sie zum Startpunkt zurückkehren. Dieser Schritt ist theoretisch einfach: Es ist in der Tat jedes Mal, wenn wir von einem Kreisbogen von der Grenze zum nächsten gehen, um in der Lage zu sein, alle Fälle zu behandeln, die auftreten können: Mehrere Kreise können Gehen Sie durch den gleichen Punkt, sie können tangential oder konzentrisch sein. Da die Berechnungen numerisch durchgeführt werden, muss außerdem die Maschinengenauigkeit berücksichtigt werden, um numerisch vorherzusagen zu können, ob sich die Kreise schneiden, tangential oder konzentrisch sind (siehe Abschnitt 6).

Wenn Teil D verbunden, aber nicht einfach verbunden ist, ist es möglich, dass sein Komplement nicht verbunden ist, dh dass Löcher auftreten. Der Teil der Grenze, den wir gerade in der Form (5) definiert haben, ist die Außengrenze, d. H. Die gemeinsame Grenze von D und die unbegrenzte Komponente seines Komplements. Um die anderen verbundenen Komponenten der Grenze (die inneren Grenzen) zu bestimmen, liefert unser Algorithmus mit Sicherheit nur die Grenze des Lochs, das den Ursprung enthält, falls vorhanden (siehe Abbildung 6d). In diesem Fall wird der dem Ursprung am nächsten liegende Punkt aus den durch (5) definierten Kreisbögen bestimmt. Wenn das Loch mit dem Ursprung vorhanden ist, ist man sich wieder sicher, dass dieser Punkt zu einem Kreisbogen des Mittelpunkts des Ursprungs gehört. Dann bestimmen wir nach wie vor Schritt für Schritt die Bögen des Kreises und halten an, wenn wir zum ersten Punkt zurückkehren. Hier kann es nützlich sein, die möglichen Seiten des Innenraums in Bezug auf die Bögen eines Kreises zu kennen, um fertige Besprechungen von zu eliminieren

Wir haben daher den Rand des Arbeitsbereichs in der Form (5) endgültig festgelegt.

5. Anwendungen

Mit der vorgeschlagenen Methode können sofort zwei Anwendungen vorgeschlagen werden (die jedoch noch nicht programmiert wurden).

Da die Grenze als (5) bekannt ist, ist es zunächst möglich, das entgegengesetzte Problem an der Grenze zu lösen: einen Punkt M Von der an der Grenze angegebenen Ebene können wir die Werte aller Winkel bestimmen $(\theta_1, \dots, \theta_p)$ wie $M = \Phi_p(\theta_1, \dots, \theta_p)$. In diesem Zusammenhang sei angemerkt, dass unsere Methode es ermöglicht, für jeden Bogen eines Randkreises eine in (5) angegebene Konfiguration vorzuschlagen, die es ermöglicht, den betreffenden Kreisbogen zu beschreiben. Es gibt Fälle, in denen mehrere gegebene Konfigurationen es ermöglichen, denselben Teil des Kreisbogens zu beschreiben, wodurch das entgegengesetzte Problem mit mehreren möglichen Lösungen entsteht. Betrachten Sie zum Beispiel das System mit einer Anzahl von Freiheitsgraden gleich $p = 2$ und deren Werte gegeben sind durch

$$\begin{aligned} l &= (0.30, 0.15) \text{ (m)}, \\ \theta^- &= (-120, -30) \text{ (}^\circ\text{)}, \\ \theta^+ &= (0, 30) \text{ (}^\circ\text{)}. \end{aligned}$$

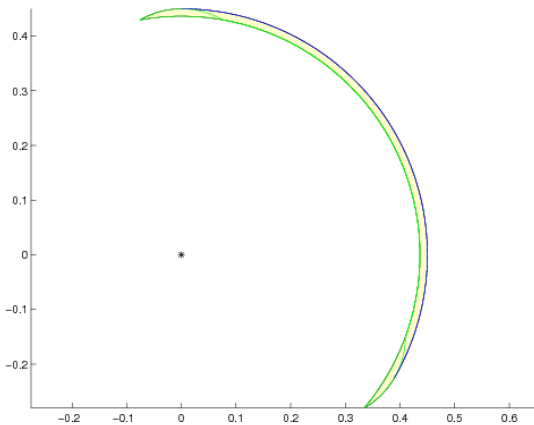


Abbildung 5. Simulationen für $p = 2$. S_I ist blau gezeichnet und S_{III} ist grün gezeichnet. Das berechnete Innere des Arbeitsbereichs ist gelb gezeichnet. Für Schritt 1 erhalten wir 7 Kreisbögen.

Siehe Abbildung 5. Es gibt zwei mögliche Konfigurationen, um einen Teil des Kreises mit dem Ursprungszentrum zu beschreiben, der dem Teil des Randes entspricht, der dem Ursprung am nächsten liegt.

Eine andere Anwendung ist ein einfaches Kriterium, um festzustellen, ob sich ein bestimmter Punkt in der Ebene im Arbeitsbereich befindet oder nicht. Es ist klar, dass wir dank der Daten von (5) wissen können, ob sich ein Punkt an der Grenze befindet oder nicht. Angenommen, es liegt nicht an der Grenze. Wenn es außerhalb des Kreises des zentralen Ursprungs und des Radius den größten Abstand vom Ursprung zur Grenze hat, wird es sicherlich außerhalb sein. Schließlich erhalten wir durch methodisches und erschöpfendes Zählen der Anzahl der Schnittpunkte eines gegebenen Liniensegments mit einer Menge von Kreisen, die durch (5) gegeben sind, und durch Berücksichtigen der Parität der erhaltenen Zahl ein einfaches Mittel, um zu wissen, ob die Punkt ist außerhalb oder innerhalb eines Arbeitsbereichs.

6. Implementierung

Die verwendeten Algorithmen wurden unter Matlab[®] analytisch implementiert, jedoch ohne symbolische Berechnung. In diesem Schritt wurde daher die numerische Berechnung von Matlab verwendet. Während der Schritte 0 bis 2 war es im Wesentlichen notwendig, Winkel während des Übergangs von kartesischen Koordinaten zu Polarkoordinaten zu bestimmen. Einzelheiten zum Algorithmus von Schritt 0 finden Sie in [3]. Darüber hinaus war es in den Schritten 1 und 2 erforderlich, die Nichtigkeit oder das Vorzeichen ungleich Null bestimmter Größen zu testen, was aufgrund der Rundung der Berechnungen notwendigerweise in ungefährender Weise erfolgt. Wir haben daher einen Parameter gewählt $\epsilon > 0$ und ersetzt zum Beispiel Typpgleichungen $X = 0$ von $|X| \leq \epsilon$. Genauer gesagt haben wir uns für Schritt 1 entschieden $\epsilon = 1.0 \cdot 10^{-12}$ und für Schritt 2: $\epsilon = 1.0 \cdot 10^{-13}$ die in einigen Fällen 100- oder 1000-mal größer genommen werden musste, wobei p größer ist.

Bei der Roboterkonstruktion ist es manchmal wichtig, explizite geometrische Merkmale der Grenzen von Arbeitsbereichen zu haben. Wir können daher in diesem Fall die symbolische Berechnung von Matlab verwenden. Beim Übergang von kartesischen Koordinaten zu Polarkoordinaten verwenden unsere Codes Matlab-Funktionen `cart2pol` und `atan2`, die keine symbolischen Typen unterstützen. Allerdings sind die Funktionen `acos` und `asin` unterstützen sie und es wäre daher

möglich, Polarkoordinaten symbolisch zu bestimmen, sofern die Längen und Winkel selbst in symbolische umgewandelt werden. In diesem Fall könnte man natürlich die Nichtigkeit und die Vorzeichen von Mengen, die auf symbolische Weise definiert sind, streng testen.

7. Numerische Simulationen

Wie in [3] betrachten wir für die numerische Simulation ein Objekt mit einer Höhe von 1,80 m. Die Längen der oberen Extremität wurden aus den anthropometrischen Daten von [4] bestimmt. Die Längen der Segmente sind als Größenverhältnis angegeben (0,108, 0,146 bzw. 0,186 für Hand, Unterarm und Arm für die rechte obere Extremität). Die Winkel entsprechen dem Maximum und Minimum der Gelenke, entsprechend der horizontalen Abduktion / Adduktion der Schulter ($-60^\circ / 120^\circ$); Beugung / Streckung des Ellenbogens ($0^\circ / 130^\circ$) und Abduktion / Adduktion des Handgelenks ($-10^\circ / 25^\circ$). Siehe Abbildung 1, $wop = 3$ und O ist die Schulter, A_1 der Ellbogen, A_2 das Handgelenk, das Segment OA_1 ist der Arm, A_1A_2 , Unterarm und A_2A_3 Hand. Siehe Tabelle 1 und Abbildungen 2, 3 und 4.

Tabelle 1. Verwendete Parameter

Fall	p	Segmentlänge / -größe	$(\theta_i^-)_{1 \leq i \leq p} (^\circ)$	$(\theta_i^+)_{1 \leq i \leq p} (^\circ)$	Zahlen
i	1	0,440	-60	120	2
ii	2	0,186; 0,254	-60; 0	120; 130	3
iii	3	0,186; 0,146; 0,108	-60; 0; -10	120; 130; 25	4

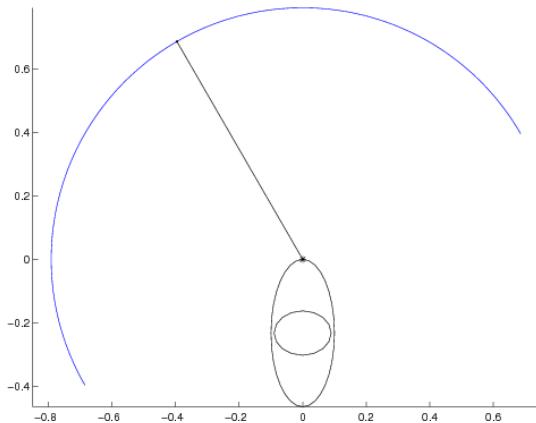


Abbildung 2. Simulationen für $p = 1$. Es gibt nur einen Kreisbogen (S_{III}) (in blau).

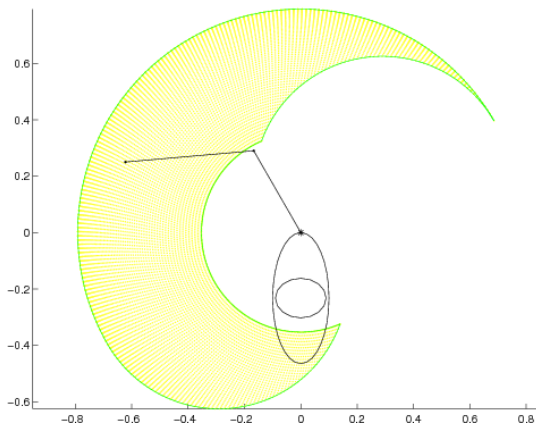
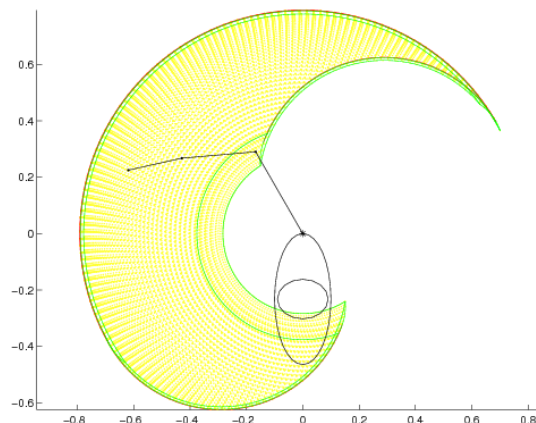
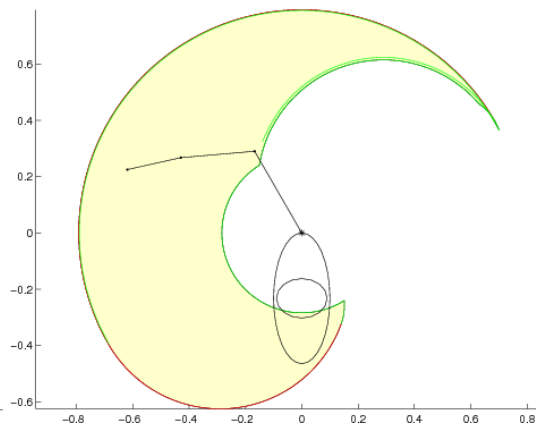


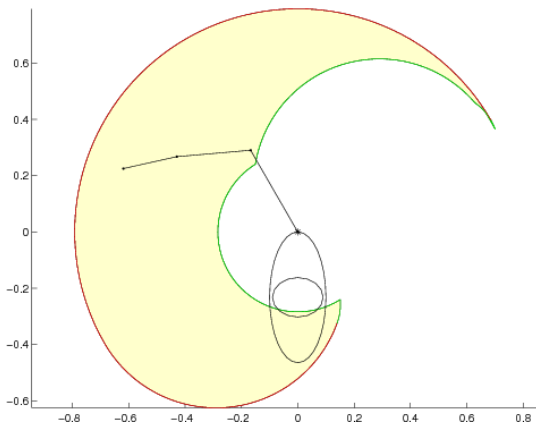
Abbildung 3. Simulationen für $p = 2$. S_{III} ist grün gezeichnet. Die gesamnte diskrete Oberfläche ist gelb dargestellt. Hier ergeben die drei Schritte die gleichen Ergebnisse. Die Anzahl der erhaltenen Bögen beträgt 4.



Schritt 0



Schritt 1



Schritt 2

Abbildung 4. Simulationen für $p = 3$. S_{II} ist rot gezeichnet und S_{III} ist grün gezeichnet. Der diskrete überstrichene Bereich und das berechnete Innere des Arbeitsbereichs sind gelb gezeichnet. Die Anzahl der Bögen, die den Schritten 0, 1 und 2 entsprechen, beträgt jeweils 16, 11 und 8.

- i. Fall i entspricht dem freien Arm, und der Unterarm und die Hand sind blockiert;
- ii. Fall ii entspricht dem freien Arm und dem Unterarm, die Hand blockiert;
- iii. Fall iii entspricht dem Arm, dem Unterarm und der freien Hand.

Tabelle 2. Geometrische Definition der Kreisbögen in der Form (5).

Typ	$\Theta_1(^{\circ})$	$\Theta_2(^{\circ})$	$\Theta_3(^{\circ})$
II	$[-60, 120]$	$\{0\}$	$\{0\}$
II	$\{120\}$	$[0, 130]$	$\{0\}$
III	$\{120\}$	$\{130\}$	$[0, 25]$
III	$[-60, 120]$	$\{130\}$	$\{25\}$
III	$\{-60\}$	$[0, 130]$	$\{25\}$
III	$\{-60\}$	$\{0\}$	$[10, 25]$
III	$[-60, -55.1005]$	$\{0\}$	$\{-10\}$
III	$\{-60\}$	$\{0\}$	$[-10, 0]$

Wir geben in Tabelle 2 die Beschreibung von $S = S_I \cup S_{II} \cup S_{III}$ in Form einer Vereinigung von Bögen (5) und den Intervallen Θ_i für $i \in \{1, 2, 3\}$ Korrespondent für den gesamten Fall iii. Jeder Satz Θ_i für $i \in \{1, 2, 3\}$ ist entweder ein Singleton oder ein geschlossener Satz. Alle Winkel in dieser Anmerkung sind in Grad angegeben.

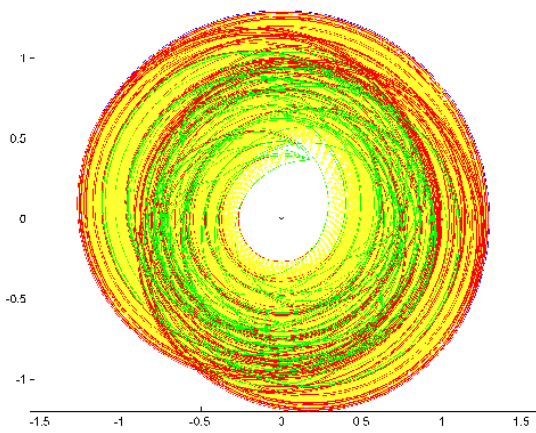
Betrachten Sie nun ein (virtuelles) System mit einer Anzahl von Freiheitsgraden gleich $p = 6$ und deren Werte gegeben sind durch

$$l = (0.20, 0.20, 0.15, 0.35, 0.20, 0.20),$$

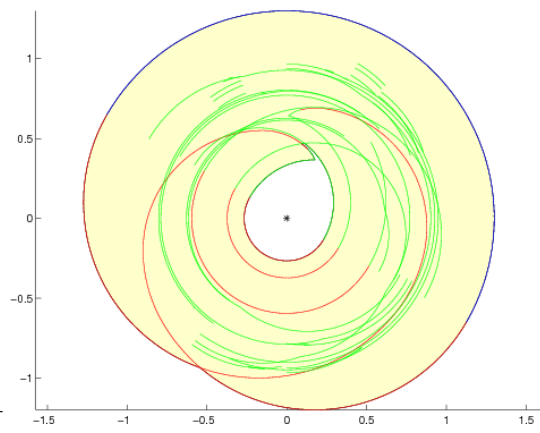
$$\theta^- = (-120, -120, -30, -90, -45, -23),$$

$$\theta^+ = (60, 170, 30, 91, 23, 24).$$

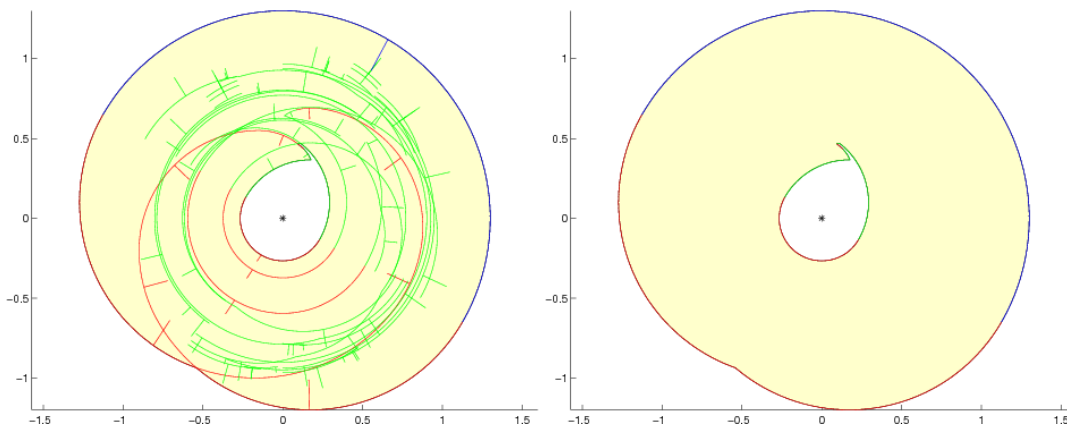
Siehe Abbildung 6.



Schritt 0



Schritt 1



Schritt 1 (mit der Evolutionsseite von A_p)

Schritt 2

Abbildung 6. Simulationen für $p = 6$. S_I ist blau gezeichnet, S_{II} ist rot gezeichnet und S_{III} ist grün gezeichnet. Der diskrete überstrichene Bereich und das berechnete Innere des Arbeitsbereichs sind gelb gezeichnet. Die Anzahl der Bögen, die den Schritten 0, 1 und 2 entsprechen, beträgt jeweils 506, 75 und 9.

An den Ecken wurden zufällige Drücke gemacht θ^\pm und die Längen l . Die Anzahl p der Segmente wurde von 2 bis 12 variiert, indem 200 Berechnungen für jeden Wert von p durchgeführt wurden. Die Berechnungen wurden auf einem Computer mit Windows 7 Professional und einem Intel (R) Core (TM) i5-6300HQ-Processor mit 2,30 GHz (64 Bit) durchgeführt.

Wir hatten in [3] gezeigt, dass der Algorithmus von Schritt 0, dem längsten, in $\mathcal{O}(a^p)$ wo a ist echt. Eine lineare Regression auf dem Logarithmus der Zeitberechnungen bestätigt dies: es gibt eine Korrelation gleich zu 0,9765 und ein Wert von a gleich zu 3,5289. Wenn sequenzielle Regression auf der Anzahl der Bögen von Schritt 0, dies bestätigt auch diese Berechnungen: es gibt eine Korrelation gleich zu 0,9950 und einen Wert von a gleich zu 2,7771. Für Schritt 1 wird eine Korrelation gleich 0,9356 und ein Wert gefunden a gleich zu 1,5190. Für Schritt 2 scheint sich die durchschnittliche Anzahl der Bögen mit p für zu stabilisieren $p \geq 5$ finden wir eine Zahl nahe 11. Wir stellen auch fest, dass bis zu $p = 4$ sind die Berechnungszeiten kürzer als 0.1 s und das auf $p = 6$ 95% der Berechnungszeiten betragen weniger als 1,0 s.

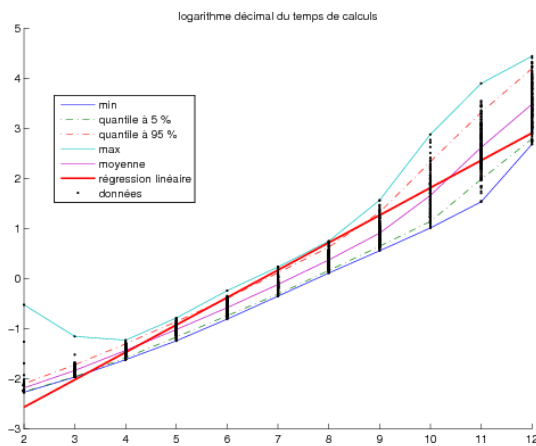


Abbildung 7. Logarithmus der Rechenzeit

Siehe Abbildung 7.

8. Einschränkungen

In der Praxis wird nach den Angaben in der Literatur p überschreitet nicht 6, (entsprechend Rechenzeiten niedriger als 1.0s). Es scheint, dass bis $p = 11$ sind die Berechnungen von viel längerer Dauer (im Durchschnitt weniger als 7.0 min.) Darüber hinaus ist die Ausführungszeit enorm (im Durchschnitt größer als 50.9min.). Unter Matlab, einer interpretierten Sprache, programmiert, können bestimmte Schleifen (die nicht parallelisiert werden können) langsam sein. Eine optimierte Programmierung in einer kompilierten Sprache würde daher an Geschwindigkeit gewinnen.

In Abschnitt 4 haben wir die Schwierigkeiten beim Erkennen von Binnengrenzen erörtert, die den Ursprung nicht enthalten. Systematische Abtasttechniken von Graphen würden es ermöglichen, geschlossene Kurven zu erfassen, die innere Grenzen darstellen könnten, indem nach allen möglichen Reihen von Kreisbögen unter den in Schritt 1 erfassten gesucht wird.

Schließlich ist die einzige mathematische Einschränkung, die eingehalten wird, die Einschränkung (1). Für größere Werte von p als die im Beispiel angegebenen können andere Einschränkungen auftreten: Es kann sich um das Segment handeln $A_i A_{i+1}$ schneidet oder befindet sich zu nahe an einem anderen Segment, was mechanisch nicht möglich ist. Wir konnten überprüfen, dass dieser Fall bei kleinen Werten von p niemals auftritt. Die Berücksichtigung dieser Einschränkung scheint ein viel schwierigeres Problem zu sein!

9. Fazit

Wir haben die Grenze eines ebenen Arbeitsbereichs auf analytische und explizite Weise nur durch explizite Berechnungen von Winkeln, Skalarprodukten, Schnittpunkten von Kreisbögen ohne Berechnung der Symbolik oder der Auflösung bestimmt Anzahl nichtlinearer Probleme. Intuitiver, da uns diese Methode, die ausschließlich auf einfachen Berechnungen skalarer Produkte basiert, effizienter erscheint. Es wird weder eine symbolische Berechnung für die Berechnung des Jacobi noch für die numerische Bestimmung des Matrixspektrums verwendet, das in Bezug auf Rechenressourcen und Rechenzeit sehr verbrauchsintensiv ist.

Eine natürliche Erweiterung dieser Arbeit ist die Erweiterung in Dimension 3. Technischer sollte es möglich sein, sich auf natürliche Weise zu erweitern, indem beispielsweise die Winkel von Euler, die Rotationsmatrizen und die Matrizen erneut genommen werden (4, 4) homogen, genannt Denavit-Hartenberg [28,29] oder mit den Empfehlungen von [30]. Die Bögen eines Kreises würden dann durch Teile von Flächen im Raum ersetzt, wie zum Beispiel Kugeln oder Tori. Die einfache geometrische Idee der Ausrichtung von Schritt 0 sollte ebenso wie das Kriterium von Schritt 1 erhalten bleiben. Schritt 2 wäre subtiler, da das Scannen der Oberflächen in zwei Dimensionen erfolgen müsste.

Anhang A. Ergänzungen zur verwendeten Methode

Wir haben daher nur die diagonalen Terme von C eliminiert alle Teile von Kreisbögen, die eine ausreichende Bedingung erfüllen, was zu (13) führt. Die verbleibenden verifizieren jedoch nicht unbedingt die Negation von (13), die geschrieben steht:

$$\exists \varepsilon_0 \in \{-1, 1\}, \quad \exists a_0 \in \mathbb{R}_+^*, \quad \forall h \in \mathbb{R}^p, \text{ vérifiant (7) } (\Theta + h \in F \text{ et } 0 \leq \|h\| \leq a_0) \implies \varepsilon_0 \rho(h) \geq 0. \quad (\text{A.1})$$

In diesem Fall $A_p(\Theta + h)$ entwickelt sich auf der gleichen Seite des Bogens C_m .

- Im Gegensatz zur Literatur und daher einfacher besteht eine erste Wahl darin, mit diesen Berechnungen zufrieden zu sein: Man nimmt also an, dass die überprüft werden

diagonales lokales Kriterium : definiert durch (16), wobei das Vorzeichen konstant ist, gleich ε_0 .

(A.2)

In diesem Fall ist (A.1) nur wahr, wenn h hat nur eine Nicht-Null-Komponente. Die erhaltenen Teile von Kreisbögen haben daher kein Zeichen von $\rho(h)$ lokal garantiert. Wir werden für Schritt 2 (Abschnitt 4) sehen, dass wir von einem garantierten Bogen ausgehen, dh wir sind sicher, dass (A.1) verifiziert ist. Allmählich jedes lokale Zeichen von $\rho(h)$ wird dann unbedingt garantiert. Somit ist am Ende des Algorithmus für alle Teile der erhaltenen Bögen eines Kreises (A.1) wahr. Für diese Wahl war daher keine Berechnung von Rang, Spektrum und Berechnung in der Symbolik erforderlich.

- Eine zweite Wahl besteht nun darin, das lokale Zeichen von garantieren zu wollen $\rho(h)$ entlang der erhaltenen Bögen, wie es herkömmlich gemacht wird. Genau genommen bringt dies nicht viel, außer um a posteriori einige erhaltene Kreisbögen zu eliminieren, die nicht verifizieren würden (A.1). Wir werden unten numerisch sehen, dass diese Bögen sehr wenige sind. Wir untersuchen dann die durch (9) definierte quadratische Form, die wir jedoch explizit und ohne symbolische Berechnung bestimmen, wie dies normalerweise der Fall ist. Außerdem muss nur der Teil definiert werden, der sich auf die Winkel bezieht, die dem entsprechen B_j null, enthält die Fälle, in denen die Punkte ausgerichtet sind. In der Tat, auch wenn es bedeutet, die Elemente von neu zu ordnen $(\varepsilon_j)_{\substack{1 \leq j \leq p \\ j \neq i}}$, B und von C können wir ohne Verlust der Allgemeinheit annehmen, dass es gibt $q \in \{0, \dots, p-1\}$ mit

$$\forall k \in \{1, \dots, q\}, \quad B_k = 0, \quad (\text{A.3a})$$

$$\forall k \in \{q+1, \dots, p-1\}, \quad B_k \neq 0. \quad (\text{A.3b})$$

Wir zersetzen uns dann h , B und C in Blöcken mit dieser Partition: $h = \begin{pmatrix} \mathcal{H}_1 \\ \mathcal{H}_2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & B_2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} \mathcal{D} & \mathcal{E} \\ \mathcal{E} & \mathcal{F} \end{pmatrix}$. Wir haben

$$\rho(h) = {}^t \mathcal{H}_1 \mathcal{D} \mathcal{H}_1 + \varepsilon_0 \sum_{j=q+1}^{p-1} (\varepsilon_0 \varepsilon_j B_j + o(1)) |h_j| + o(\|h\|^2).$$

Unter Berücksichtigung von (16) und (A.4) ist daher eine notwendige und ausreichende Bedingung für (A.1)

$$\exists a_0 \in \mathbb{R}_+^*, \quad \forall \mathcal{H}_1 \in \mathbb{R}^q, \text{ vérifiant (6) et (7), } (0 \leq \|\mathcal{H}_1\| \leq a_0 \implies \varepsilon_0 {}^t \mathcal{H}_1 \mathcal{D} \mathcal{H}_1 \geq 0). \quad (\text{A.5})$$

Umgekehrt ist eine ausreichende (aber nicht mehr notwendige) Bedingung für (13):

$$\exists a_0 \in \mathbb{R}_+^*, \quad \forall \mathcal{H}_1, \mathcal{H}'_1 \in \mathbb{R}^q, \text{ vérifiant (6) et (7) } (0 < \|\mathcal{H}_1\| \leq a_0 \text{ et } 0 < \|\mathcal{H}'_1\| \leq a_0) \implies ({}^t \mathcal{H}_1 \mathcal{D} \mathcal{H}_1) ({}^t \mathcal{H}'_1 \mathcal{D} \mathcal{H}'_1) < 0. \quad (\text{A.6})$$

Wir werden daher veranlasst, wie in der Literatur die folgende zweite Wahl zu treffen:

Gesamtes lokales Kriterium : definiert durch (A.5) oder (A.6).

(A.7)

Es ist daher notwendig, das Vorzeichen einer quadratischen Form zu untersuchen, indem das Spektrum der zugehörigen Matrix klassisch untersucht wird. Wir beschränken uns jedoch auf die Komponenten, die den ausgerichteten Punkten entsprechen (einschließlich der Fälle, in denen die entsprechenden Winkel frei sind). Wir können die Koeffizienten von explizit bestimmen \mathcal{D} , nur nach den Abständen zwischen den Punkten A_k , ohne die symbolische Berechnung zu durchlaufen, wie im folgenden Lemma gezeigt:

Lemma A.1 (Ausdruck nichtdiagonaler Terme von \mathcal{D} (entsprechend den Bedingungen B_j null)) Für j, j' in $\{1, \dots, q\}$ mit $j \leq j'$, die Punkte A_{i-1} , A_{j-1} , A_{j-1} und A_p ausgerichtet sind und wir haben

$$\mathcal{D}_{jj'} = \overline{A_{j-1} A_p A_{j-1} A_p} - \overline{A_{i-1} A_p A_{j-1} A_p}.$$

Es gibt einfache ausreichende Bedingungen, die hier nicht zum Ausdruck gebracht werden \mathcal{D} , ohne sein Spektrum zu durchlaufen, die sicherstellen, dass (A.5) oder (A.6) verifiziert wird. In diesem Fall haben alle Kreisbögen ein garantiertes Vorzeichen. Als letztes Mittel, wenn keiner von ihnen verifiziert wird, dann wie in der Literatur das Spektrum von \mathcal{D} . Wir werden numerisch sehen, dass diese Fälle sehr selten sind

Referenzen

1. J.F.M. Molenbroek. Reach envelopes of older adults. In : The 42-nd Annual Meeting of the "Human Factors and Ergonomics Society", pages 166-170, Chicago, USA, 1998.
2. Jérôme Bastien, Pierre Legreneur, and Karine Monteil. Caractérisation géométrique de la frontière de l'espace de travail d'un système polyarticulé dans le plan. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences (Mécanique) 335 (3), 181-186, 2007.
3. Jérôme Bastien, Pierre Legreneur, and Karine Monteil. A geometrical alternative to jacobian rank deficiency method for planar workspace characterisation. Mechanism and Machine Theory 45 (2010), 335-348.
4. D.A. Winter. Biomechanics and Motor Control of Human Movement. John Wiley & Sons, New Jersey, Canada, 4 edition, 2009.
5. Karim Abdel-Malek, Frederick Adkins, Harn-You Yeh, and Edward Haug. On the determination of boundaries to manipulator workspaces. Robotic and Computer Integrated Manufacturing, 13 (1): 63-72, 1997.
6. Karim Abdel-Malek and Harn-You Yeh. Geometric representation of the swept volum using jacobain rank-deficiency conditions. Computer Aided Design, 29(6):457-468, 1997.
7. Karim Abdel-Malek, Harn-You Yeh, and Othman Saeb. Swept volumes: void and boundary identification. Computer-Aided Design, 30(13):1009-1018, 1998.
8. Karim Abdel-Malek, Jingzhou Yang, Richard Brand, and Emad Tanbour. Towards understanding the workspace of human limbs. Ergonomics, 47(13):1386-1405, 2004.
9. E.Dupuis, E.Papadopoulos, and V.Hayward. The Singular Vector Algorithm for the Computation of Rank- Deficiency Loci of Rectangular Jacobians.

- In : International Conference on Intelligent Robots and Systems, Maui, Hawaii, USA, 2001.
10. Jingzhou Yang, Yunqing Zhang, Liping Chen, and Karim Abdel-Malek. Reach envelope of human extremities. *Tsinghua Sci. Technol.*, 9(6):653-666, 2004.
 11. Karim Abdel-Malek, Harn-Jou Yeh, and Saib Othman. Interior and exterior boundaries to the workspace of mechanical manipulators. *Robotics and Computer Integrated Manufacturing*, 16:365-376, 2000.
 12. Mazen Zein, Philippe Wenger, and Damien Chablat. An exhaustive study of the workspace topologies of all 3R orthogonal manipulators with geometric simplifications. *Mech. Mach. Theory*, 41(8):971-986, 2006.
 13. A.M. Hay and J.A. Snyman. The determination of nonconvex workspaces of generally constrained planar Stewart platforms. *Comput. Math. Appl.*, 40(8-9):1043-1060, 2000.
 14. Andrzej J. Cebula and Paul J. Zsombor-Murray. Formulation of the workspace equation for wrist-partitioned spatial manipulators. *Mechanism and Machine Theory*, 41(7):778-789, 2006.
 15. Sen Dibakar and T.S. Mruthyunjaya. A computational geometry approach for determination of boundary of workspaces of planar manipulators with arbitrary topology. *Mechanism and Machine Theory*, 34:149-169, 1999.
 16. Jean-Pierre Merlet, Clément M. Gosselin, and Nicolas Mouly. Workspaces of planar parallel manipulators. *Mech. Mach. Theory*, 33(1-2):7-20, 1998.
 17. M. Husty, E. Ottaviano, and M. Ceccarelli. A geometrical characterization of workspace singularities in 3R manipulators. In : *Advances in robot kinematics: analysis and design*, pages 411-418. Springer, New York, 2008.
 18. Nives Klopčar and Jadran Lenarčič. Kinematic model for determination of human arm reachable workspace. *Meccanica*, 40(2):203-219, 2005.
 19. Xin-Jun Liu, Jinsong Wang, and G. Pritschow. Kinematics, singularity and workspace of planar 5R symmetrical parallel mechanisms. *Mechanism and Machine Theory*, 41(2):145-169, 2006.
 20. Haidong Li, Clément M. Gosselin, and Marc J. Richard. Determination of maximal singularity-free zones in the workspace of planar three-degree-of-freedom parallel mechanisms. *Mech. Mach. Theory*, 41(10):1157-1167, 2006.
 21. Jing-Shan Zhao, Min Chen, Kai Zhou, Jing-Xin Dong, and Zhi-Jing Feng. Workspace of parallel manipulators with symmetric identical kinematic chains. *Mech. Mach. Theory*, 41(6):632-645, 2006.
 22. P. Jauer, I. Kuhlemann, F. Ernst, and A. Schweikard. Gpu-based real-time 3d workspace generation of arbitrary serial manipulators. In : *The 2nd International Conference on Control, Automation and Robotics (ICCAR)*, 2016.
 23. Ilian A. Bonev and Clément M. Gosselin. Analytical determination of the workspace of symmetrical spherical parallel mechanisms. *IEEE Transactions on Robotics*, 22(5):1011-1017, 2006.
 24. Marc Arsenault and Clément M. Gosselin. Kinematic, static and dynamic analysis of a planar 2-DOF tensegrity mechanism. *Mech. Mach. Theory*, 41(9):1072-1089, 2006.
 25. Oriol Bohigas, Montserrat Manubens, and Lluís Ros. A complete method for workspace boundary determination on general structure manipulators. *IEEE Transactions on Robotics*, 28(5):993-1006, 2012.
 26. Oriol Bohigas, Montserrat Manubens, and Lluís Ros. Singularities of robot mechanisms, volume 41 of *Mechanisms and Machine Science*. Springer, Cham, 2017. Numerical computation and avoidance path planning.
 27. Josep M. Porta, Lluís Ros, and Federico Thomas. A linear relaxation technique for the position analysis of multiloop linkages. *IEEE Transactions on Robotics*, 25(2):225-239, 2009.
 28. J. Denavit and R. S. Hartenberg. A kinematic notation for lower-pair mechanisms based on matrices. *J. Appl. Mech.*, 22:215-221, 1955.
 29. Giovanni Legnani, Federico Casolo, Paolo Righettini, and Bruno Zappa. A homogeneous matrix approach to 3d kinematics and dynamics - i. theory. *Mechanism and Machine Theory*, 31(5):573-587, 1996.
 30. G. Wu, F.C.T van der Helm, M. Veeger, H.E.J. Makhssous, P. Van Roy, C. Anglin, J. Nagels, A.R. Karduna, K. McQuade, X. Wang, and al. Isb recommendation on definitions of joint coordinate systems of various joints for the reporting of human joint motion-part ii: shoulder, elbow, wrist. *Journal of Biomechanics*, 38(5):981-992, 2005.